Capitolo 8

Il metodo dei lavori virtuali nelle strutture a semiguscio

Carlo Magno parlando ad un suo consigliere e riferendosi a popolazioni che vivevano appena a sud delle Alpi, ebbe a dire: ' .. sono davvero insopportabili questi meridionali .. '.

Le equazioni della statica sono sufficienti alla determinazione dello stato di sollecitazione solo in poche, semplici configurazioni strutturali. In gran parte delle applicazioni, come esaminato nei capitoli precedenti, le incognite sono sovrabbondanti e, alle equazioni della statica, sono da aggiungere per il calcolo delle iperstatiche, delle equazioni *equazioni di elasticità.* Queste tengono conto di come la struttura si deforma e dunque delle sollecitazioni che si creano negli elementi a causa delle forze applicate.
La scrittura delle equazioni di elasticità può farsi in diverse maniere. Molti sono i teoremi della teoria dell'elasticità disponibili per tale scopo. In queste note la scelta è caduta sul Principio dei Lavori Virtuali (che sarà spesso riferito con l'acronimo PLV). La portata di tale principio nel campo della meccanica dei continui è davvero considerevole. I risultati ottenuti, grazie alla sua applicazione, hanno rilevanza storica nei diversi campi della meccanica applicata. Le applicazioni qui proposte sono da considerarsi solo un saggio della potenza di questo principio della meccanica.

8.1 Enunciato del PLV ed esempio applicativo elementare

Un enunciato del Principio dei Lavori Virtuali PLV è il seguente:

> *il lavoro virtuale complessivo fatto da un sistema di forze e tensioni equilibrato 'a' su di un sistema di spostamenti e deformazioni virtuale 'b' è nullo.*

In formule:

$$\delta L^{ab} \;=\; 0. \tag{8.1}$$

Nulla si vuole aggiungere a quanto riportato nei testi specialistici sul PLV e sul significato di grandezza virtuali.
Considerando il lavoro totale costituito dalla differenza fra lavoro delle forze esterne δL_e^{ab} e lavoro delle tensioni interne δL_i^{ab} il PLV si riscrive:

$$\delta L_e^{ab} \;=\; \delta L_i^{ab}. \tag{8.2}$$

Tale equazione può essere utilizzata per molti scopi. Qui l'interesse è ristretto al suo uso come strumento per la scrittura di condizioni di congruenza e di compatibiltà. Infatti, assegnato un sistema 'a' equilibrato, il PLV,

$$\delta L_e^{ab} \;=\; \delta L_i^{ab}, \tag{8.3}$$

diventa una condizione di congruenza per il sistema 'b'. Oppure, assegnato un sistema 'b' congruente, il PLV,

$$\delta L_e^{ab} \;=\; \delta L_i^{ab}, \tag{8.4}$$

diventa una condizione di equilibrio per il sistema 'a'.

Se i due sistemi 'a' e 'b' sono l'uno equilibrato e l'altro congruente la 8.2 è una pura verifica formale.
Nella pratica ingegneristica l'applicazione del PLV è legata alla capacità dell'analista di generare idee che, attraverso il PLV, risolvano in maniera conveniente un assegnato problema. Questa peculiarità rende il PLV, allo stesso tempo 'croce e delizia' dell'ingegnere.

Ad esemplificare l'uso del PLV valga l'esempio elementare che segue.
Considerato un sistema ad un grado di libertà rappresentato in figura 8.1, costituito da un asta infinitamente rigida connessa a due appoggi che si muovono sulle due rette ortogonali indicate nella stessa figura. Sul carrello A è applicata una forza di intensità P che nella configurazione deformata α è contrastata da un momento torcente generato dalla molla di torsione, di rigidezza k posizionata sull'altro estremo B. È elementare scrivere le condizioni di equilibrio (equazione di momento rispetto a B):

$$Pw = k\alpha, \quad Pl \sin\alpha = k\alpha; \tag{8.5}$$

e di congruenza (inestensibilità dell'asta):

$$u = l\;(1 - \cos\alpha). \tag{8.6}$$

Tali condizioni possono essere ricavate l'una dall'altra attraverso l'applicazione del PLV.

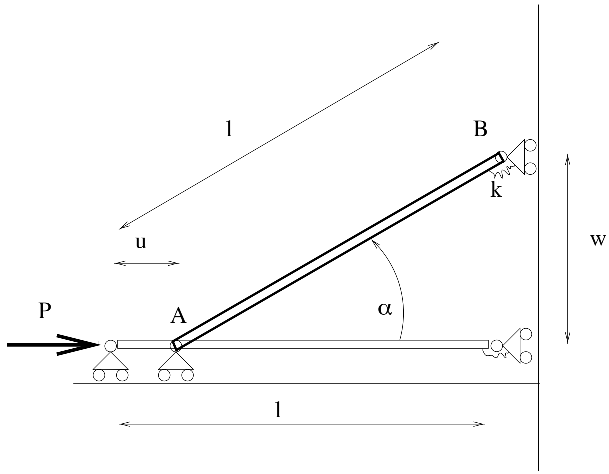

Figura 8.1: *Esempio elementare.*

Considerato infatti un sistema di forze equilibrato 'a' $(P^a, K\alpha^a)$ ed un sistema di spostamenti congruenti $(\delta u^b, \delta\alpha^b)$ il PLV si scrive:

$$\delta L_e^{ab} \; = \; \delta L_i^{ab} \quad \to P^a \delta u^b = k\alpha^a \delta\alpha^b. \tag{8.7}$$

Si cominci con l'ipotizzare che il sistema 'b' sia congruente, valga cioè la:

$$u^b = l\;(1 - \cos\alpha^b). \tag{8.8}$$

La variazione virtuale dello spostamento u è ottenibile, per definizione di grandezza virtuale, come parte principale della variazione di esso[1]:

$$\delta u = \frac{du}{d\alpha}|_\alpha \delta\alpha = l \sin\alpha\; \delta\alpha. \tag{8.9}$$

Sostituendo nella eq.(8.7) si ha

$$P^a \delta u^b = k\alpha^a \delta\alpha^b \quad \to P^a l \sin\alpha\; \delta\alpha = k\alpha^a \delta\alpha^b, \tag{8.10}$$

da cui la condizione di equilibrio per il sistema 'a'

$$P^a l \sin\alpha^a = k\alpha^a. \tag{8.11}$$

Analogamente il PLV può essere adoperato per ricavare condizioni di congruenza del sistema 'b', note le condizioni di equilibrio del sistema a. L'ipotesi è ora che valga la

[1]L'operazione di derivazione, in generale non richiesta nel campo delle piccole deformazioni è qui necessaria per la supposta finitezza delle relazioni fra spostamenti. Per le stesse ragioni risulterà necessaria una integrazione per il passaggio inverso da grandezza virtuale a valore finito dello spostamento.